

福岡大学先端経済研究センター ワーキングペーパーシリーズ

最小矩形法による正值母数推定の統計的側面と
その方法論的可能性について
～バイアスを含んだデータへの応用可能性～

福岡大学経済学部
鍵原 理人

WPJ-2009-001



福岡大学先端経済研究センター
(CAES)

〒814-0180
福岡県福岡市城南区七隈八丁目 19 番 1 号

最小矩形法による正值母数推定の統計的側面と その方法論的可能性について － バイアスを含んだデータへの応用可能性 －

鍵原理人*

2009年11月

I 序論

本稿では、正值逆問題の解法として Yoneda [2006] が提案した最小矩形法に関して、正值母数推定における統計的側面を Kagihara [2009] の結果を中心に紹介し、その方法論上の可能性を論ずることとする。Yoneda [2006] は、原因 $\theta \in R^K$ と結果 $y \in R^n$ との間の因果機構 $x(\theta) : R^K \rightarrow R^n$ ($K < n$, $y \approx x(\theta)$) を所与として、望ましい結果 y を産む為の原因 θ をできる限り正しく同定しようとする逆問題において、 $x(\theta)$ と y が正值から成る場合を正值逆問題と定義した上で、最小二乗法に代わる方法として最小矩形法を提案した。Kagihara and Yoneda [2009] は、Yoneda [2006] で提示された統計モデルの妥当性を考察し、尤度の最大化が最小矩形法を帰結するように修正した。以上で導出された確率分布は、Johnson, Kotz and Balakrishnan [1994,1995] 等の文献に見出されず、新奇な分布である可能性もある為、Kagihara [2009] においてその基本的な性質が分析されている。以下、最小矩形推定量の基本的な統計的性質を提示すると

*福岡大学経済学部, E-mail: kagihara@fukuoka-u.ac.jp

共に、その過程で導出される新規であり得る確率分布とその一般化を紹介する。以上の結果に基づいて、最小矩形法が有する方法論的可能性が議論されることになる。

さて、分析の含意を明らかにする為、因果機構として最も単純な状況 $x(\theta) = \theta \in R$ を考察の対象とする。正值変数 $y > 0$ に関する大きさ n のデータ $\{y_i\}_{i=1}^n$ に基づいて、 $y \approx \theta$ なる正值未知母数 $\theta > 0$ を推定することを考えよう。通常、 y と θ との間の何らかの誤差を最小化することによって、未知母数 θ を推定することになるだろう。最小二乗法ならば二乗誤差 $(y - \theta)^2$ を最小化し、最小絶対偏差法ならば絶対誤差 $|y - \theta|$ を最小化する。この時、未知母数 θ の推定量として、それぞれ標本平均と標本中央値が帰結されることはよく知られた事実である。いずれの場合も、直感的には $y \approx \theta$ から帰結される $(y - \theta) \approx 0$ という誤差に着目したものと言えるが、 y, θ 共に正值であることに注意すれば、 $y \approx \theta > 0$ から導かれる誤差として、以下を構成することができる。

$$\left(\frac{\theta}{y} - 1\right) \approx 0 \iff \log \frac{\theta}{y} \approx 0. \quad (1)$$

これらの誤差を用いて、Stein [1964], Brown [1968], Maatta and Casella [1990] のように二乗誤差

$$h(y, \theta) = \left(\frac{\theta}{y} - 1\right)^2 \quad (2)$$

に着目することもできようし、Brown [1968] のように対数二乗誤差

$$h(y, \theta) = \left(\log \frac{\theta}{y}\right)^2 \quad (3)$$

に着目することもできよう。いずれの場合も、正值性に注意した(1)式両辺の各誤差に個別に着目した最小二乗法と言えるが、Yoneda [2006] は、(1)式両辺双方の誤差を利用して、以下(4)式で定義される「半対数 (semilogarithmic) 誤差」を構成し、それを最小化する推定量(5)を「最小矩形推定量 (least rectangles

estimator)」として提案している¹。以下、この方法を「最小矩形法」と呼ぶことにしよう。

$$h_r(y, \theta) := \left(\frac{\theta}{y} - 1 \right) \log \frac{\theta}{y}, \quad (4)$$

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^n h_r(y_i, \theta). \quad (5)$$

ここで、(4) 式で定義される半対数誤差とは、(1) 式両辺の各誤差を各辺とする矩形の面積を意味しており、本稿では以後、最小矩形推定量の意義に合わせて「矩形誤差 (rectangular error)」と呼ぶことにする。この観点から考えると、(2) 式と(3) 式で定義される二乗誤差 (squared error) とは、(1) 式両辺各誤差を一辺とする正方形の面積をそれぞれ意味しており、矩形誤差との対比においては「正方形誤差」と表現されるのが適当となろう²。

さて、矩形誤差(4) 同様に、(1) 式両辺双方の誤差を利用したものとして、James and Stein [1961], Brown [1968], Brown [1990], Lehmann and Casella [1998], Casella and Berger [2002] で分析、紹介されている Stein 損失に対応する誤差

$$h(y, \theta) = \frac{\theta}{y} - 1 - \log \frac{\theta}{y} \quad (6)$$

を考えることもできよう。上述の二乗誤差(2) と対数二乗誤差(3) が(1) 式で定義される誤差のいずれか一方にのみ着目した形であるのに対して、Stein 損失に対応する誤差(6) と Yoneda [2006] の矩形誤差(4) においては、(1) 式両辺双方の誤差を利用していることは注目に値しよう。これら両辺の誤差を加算したのが Stein 損失に対応する誤差(6) であり、乗算したものが矩形誤差(4) である。

以上で紹介した正值性を利用する誤差(2), (3), (4), (6) は、全て $z := \theta/y > 0$ の関数として図 1 に示されているように、 $z = 1 \iff y = \theta$ において最小値

¹Yoneda [2006] では、(5) 式右辺の各項が加重された形で提案されているが、本稿では簡単化の為に加重項を考慮していない。

²この場合、最小矩形法 (method of least rectangles) との対比において、最小二乗法 (method of least squares) もまた「最小正方形法」と表現されることになる。

を取る凸関数となっていることが分かる。これらの誤差をより詳細に比較検討することは、興味深い問題であろう。また、二乗誤差、対数二乗誤差、Stein 損失誤差に比して、矩形誤差は本稿で紹介するような統計モデル的基礎付けが明示される上に、Jeffreys 情報量と同じ形を持っていることは注意に値する。Jeffreys 情報量は、二つの密度関数 f, g の間の距離的測度として最も一般的な Kullback-Leibler 情報量の欠点とも指摘される非対称性を修正したものであり、 $E_g[(f/g - 1) \log(f/g)]$ と定義される（例えば、Kullback [1968], Burbea [2006] を参照せよ）。矩形誤差(4) と Jeffreys 情報量との相似は興味深い事実と言えよう。

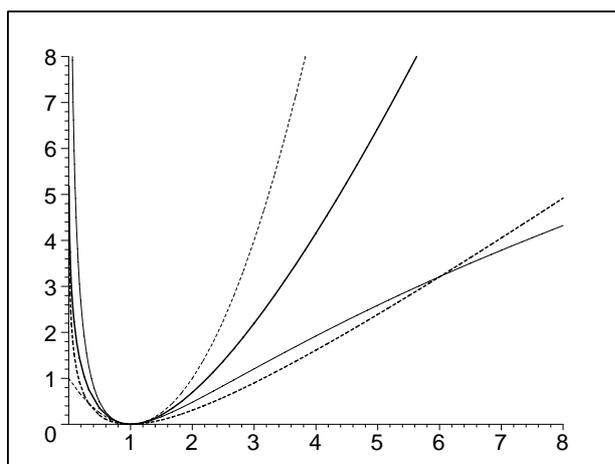


図 1: 正値母数推定における様々な誤差 (横軸, $z := \theta/y > 0$): 矩形誤差 ((4) 式, 実線), Stein 損失誤差 ((6) 式, 点線), 対数二乗誤差 ((3) 式, 細実線), 二乗誤差 ((2) 式, 細点線)

以下、第 II 節において、矩形誤差(4) の最小化が尤度の最大化と一致するような統計モデルを紹介する。あわせて、そこで導出された確率分布の基本的な性質とその一般化された分布を提示すると共に、最小矩形推定量(5) の漸近分布を紹介する。これらの結果に基づいて、第 III 節において、最小矩形法が有する

方法論上の可能性を計測上のバイアスを含んだデータとの関連で議論する。本節での議論が本研究を開始するに至った主要動機であり、筆者の問題意識を明示する上でも有意義であろう。最後に、第IV節において、最小矩形法に関して残された課題を指摘することによって、今後の研究方向を展望する。以上の中で、最小矩形法は、右裾が厚い確率分布から生成される正値変数の分析に適しており、また、第III節において表現されるようなバイアスデータの分析に可能性を有していることが示される。

II 最小矩形法から導出される分布と推定量の漸近分布

1 最小矩形法の統計モデル：矩形誤差分布

Yoneda [2006] は、(4) 式で定義された矩形誤差を負の対数尤度に見立てることで、その指数変換 $e^{-(\theta/y-1)\log\theta/y} = (\theta/y)^{1-\theta/y}$ が観測変数 y の確率分布と関連することを提示した。これを受けて、Kagihara and Yoneda [2009] は矩形誤差の最小化問題(5) が尤度関数の最大化問題と一致するように確率分布を修正し、統計モデルを再提示した。また、それらの基本的な統計的性質は Kagihara [2009] によって分析されており、以下で概観することにしよう。

正値を取る一変量データ $\{y_i > 0\}_{i=1}^n$ があった時、その回帰関数（本稿では、単に未知母数 $\theta > 0$ とする）を推定する方法として、Yoneda [2006] は上述のように矩形誤差(4) を最小化する最小矩形法を提案した。ここで、データ生成過程として、以下のような単純な乗数誤差モデルを仮定する。

$$y_i = \theta\epsilon_i, \quad i = 1 \dots n. \quad (7)$$

$y_i > 0$: 観測可能な被説明変数

$\theta > 0$: 未知母数

$\epsilon_i > 0$: 誤差項

誤差項系列 $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ は独立同分布として、以下の分布に従うと仮定する。

$$\epsilon_i \sim f_\epsilon(\epsilon) \propto \epsilon^{1/\epsilon-2}. \quad (8)$$

この時、未知母数 θ の対数尤度関数は、

$$\sum_i \left(1 - \frac{\theta}{y_i}\right) \log \frac{\theta}{y_i} - \sum_i \log y_i$$

となり、その最大化は矩形誤差の最小化(5)と同値であることが分かる。

矩形誤差から導出された確率分布(8)は、Johnson, Kotz and Balakrishnan [1994,1995]等の文献に見出せない故、本稿では「矩形誤差分布」と呼ぶことにしよう。その特徴を見る為に、(8)式を一般化した関数型 $\epsilon^{1/\epsilon-a}$ を考えると、 $a > 1$ である時、適当な基準化定数 $C_a := \int_0^{+\infty} \epsilon^{1/\epsilon-a} d\epsilon < +\infty$ が存在して密度関数になっていることが示される。

$$f_\epsilon(\epsilon|a) = \frac{1}{C_a} \epsilon^{1/\epsilon-a}, \quad \epsilon > 0, \quad a > 1. \quad (9)$$

本稿では、(9)式で表現される密度関数を持つ分布を「矩形誤差型分布」と呼ぶことにする。 $a = 2$ の時、最小矩形法を最尤推定法と結び付ける矩形誤差分布(8)に帰着し、この時、 $C_2 \simeq 1.995$ と計算される。また、そのモーメントは $(a-1)$ より小さい最大の整数の次数まで存在することが示される。従って、 $a = 2$ の場合、一次モーメントさえ存在しないことが分かり、矩形誤差分布(8)は右裾に厚い分布であることが窺われる。密度関数(9)の形状に関しては、図2に示されている通り、次の特徴を挙げることができる。即ち、 $\epsilon \rightarrow +\infty$ の時、密度は0に収束し、パラメータ a が1より大きくなるにつれて、密度のモードは $\epsilon = 1$ の地点から原点に近付いていくが、 $\epsilon \rightarrow 0$ においては密度は0に収束する。以上の点に付き、より詳細な議論は Kagihara [2009] を参照されたい。

2 尺度分布族と最小矩形推定量の漸近分布

前節において最小矩形法を最尤推定法に結び付ける矩形誤差分布(8)を一般化した矩形誤差型分布(9)を考察した。本節においては(9)式に尺度母数 $\theta > 0$ を導入するが、ここで $a = 2$ ならば、(7)式と(8)式で定義される確率変数 y が得られることに注意せよ。これによって、(5)式で定義された最小矩形推定量の

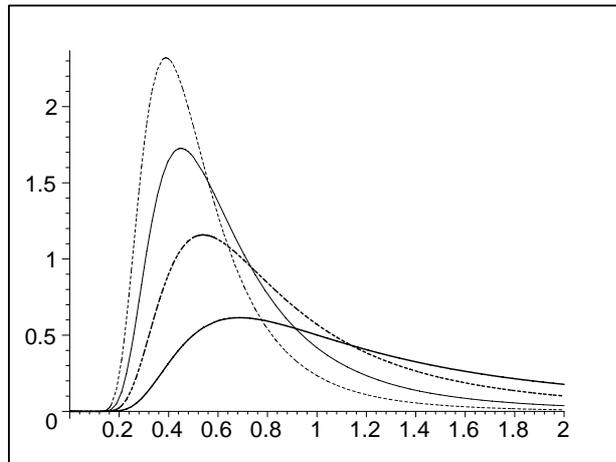


図 2: 矩形誤差型分布 ((9) 式): $a = 2$ (実線, 矩形誤差分布), $a = 3$ (点線), $a = 4$ (細実線), $a = 5$ (細点線)

統計的性質を明らかにすることができる。さて, ϵ が矩形誤差型分布(9) に従う時, $y = \theta\epsilon$ の密度関数は以下となる。

$$\begin{aligned}
 f_y(y|\theta) &= \frac{1}{\theta C_a} \left(\frac{y}{\theta}\right)^{\frac{\theta}{y}-a}, \quad \text{for } y > 0, \\
 &= \frac{\theta^{a-1}}{C_a} \exp \left[\theta \frac{\log y}{y} - (\theta \log \theta) \frac{1}{y} - a \log y \right].
 \end{aligned} \tag{10}$$

(10) 式は矩形誤差型分布の尺度分布族であり, 指数型分布族に属することが分かる³。図 3 には, 最小矩形推定量に関わる $a = 2$ のケースが, 様々な尺度母数の下に描かれている。

ここで, 最小矩形推定量(5) が, データ生成過程(7) と誤差分布(8) の下で, 尤度関数を最大化する推定量となっていることに注意すると, 最小矩形推定量とは即ち, $a = 2$ の時の矩形誤差型分布(10) の尺度母数 θ の最尤推定量に他なら

³より精確には, 曲指数分布族に属することになる。

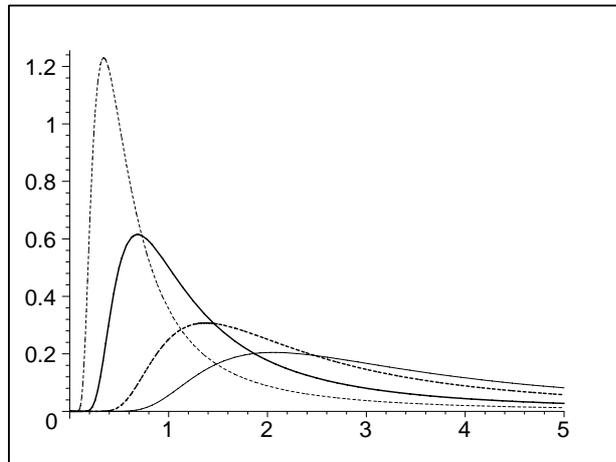


図 3: 矩形誤差型分布の尺度分布族 ((10) 式, $a = 2$): $\theta = 1$ (実線), $\theta = 2$ (点線), $\theta = 3$ (細実線), $\theta = 1/2$ (細点線)

ないことが分かる。尤度に関する正則条件を確認すること等により、最小矩形推定量が、尺度母数 θ , 即ち, (7) 式で定義された乗数誤差モデルにおける回帰関数 θ の最尤推定量として、以下の漸近分布を有することが示される。漸近分散は Fisher 情報量の逆数であり、最小矩形推定量は漸近有効推定量である。導出等のより詳細な議論は Kagihara [2009] を参照されたい。

定理 1. 乗数誤差モデル(7) と誤差分布(8) の下, (5) 式で定義される無作為標本に基づく θ の最小矩形推定量 (即ち, 最尤推定量) の漸近分布は, 以下となる。但し, $C_a := \int_0^{+\infty} e^{1/\epsilon - a} d\epsilon$ である。

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, I(\theta)^{-1}),$$

$$I(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \left(1 + \frac{C_3}{C_2} \right) \simeq \frac{3.747}{1.995\theta^2}.$$

既述の如く, 矩形誤差分布(8) には期待値が存在せず, 右裾が厚い分布であることが窺われるが故に, 最小矩形法は, 右裾に厚い分布から生成されるような

正值変数の回帰モデルにおいて有用な推定法と言える。この事実は、最小矩形法の魅力的な性質を形成しよう。

3 最小矩形法から導出された分布の更なる一般化

以上、乗数誤差モデル(7)における未知母数 θ の最小矩形推定量(5) が最尤推定量に一致する矩形誤差分布(8) とその尺度分布族(10) を考察し、その中で最小矩形推定量の漸近分布を提示した。本節では、矩形誤差型分布(9) の更なる一般化を紹介する。

矩形誤差型分布(9) に尺度母数を直接導入する ((10) 式) のではなく、対数変換 ($\log \epsilon$) した後に位置母数 $\mu \in R$ と尺度母数 $\sigma > 0$ を導入することによって、以下で展開するように、より広い分布族が得られることが分かる。この確率変数を η と記すことにする。

$$\eta := \mu + \sigma \log \epsilon.$$

このとき、確率変数 η の密度関数として以下を得る。

$$f_{\eta}(\eta) = \frac{1}{\sigma C_a} \exp \left[-\frac{\eta - \mu}{\sigma} \left(a - 1 - \exp \left[-\frac{\eta - \mu}{\sigma} \right] \right) \right], \quad (11)$$

for $\eta \in (-\infty, +\infty)$.

この密度関数は、対数変換された矩形誤差型分布の位置尺度分布族 (本稿では「対数矩形誤差型分布」と呼ぶ) を示しているが、以下(12) 式に示す対数 Weibull 分布の密度関数 $f_{\log W}$ と極めて似た形を有していることは興味深い事実である (特に、(11) 式において $a = 2$ の場合)。

$$f_{\log W}(\eta) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[-\frac{\eta - \mu}{\sigma} - \exp \left[-\frac{\eta - \mu}{\sigma} \right] \right], \quad (12)$$

for $\eta \in (-\infty, +\infty)$.

図 4 には、 $a = 2, \mu = 0, \sigma = 1$ の場合の対数矩形誤差型分布と対数 Weibull 分布の密度関数が描かれている。また、最小矩形法を最尤法に結び付ける $a = 2$

の場合において，対数矩形誤差型分布の位置母数と尺度母数の影響はそれぞれ図5と図6において示されている。

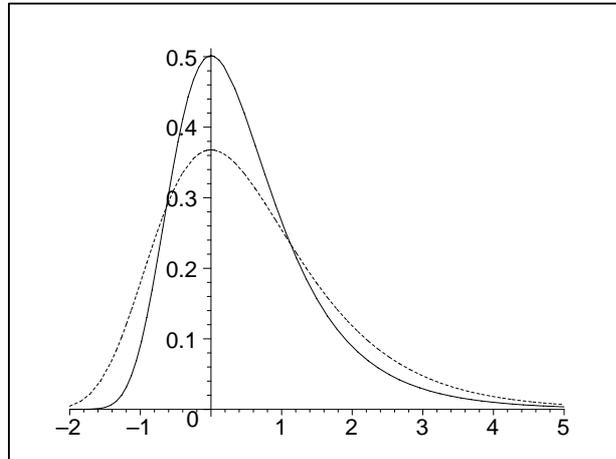


図 4: 対数矩形誤差型分布 ((11) 式, 実線) と対数 Weibull 分布 ((12) 式, 点線); 但し, $a = 2, \mu = 0, \sigma = 1$

以上の下, 対数矩形誤差型分布(11) に指数変換を施した確率変数 $\nu := e^\eta$ の密度関数として以下を得る。

$$f_\nu(\nu) = \frac{1}{\sigma C_a \nu} \exp \left[-\frac{\log \nu - \mu}{\sigma} \left(a - 1 - \exp \left[-\frac{\log \nu - \mu}{\sigma} \right] \right) \right], \quad (13)$$

for $\nu > 0$.

ここで, $\sigma = 1$ とし, $\theta = e^\mu$ とパラメータを再定義すれば, 確かに(10) 式が得られ, (13) 式は矩形誤差型分布の尺度分布族(10) を一般化したものになっていることが分かる。即ち, 矩形誤差型分布(9) に直接尺度母数を導入するよりも, 対数変換後に導入した(13) 式において, より広い分布族が得られているのである。対数矩形誤差型分布(11) を指数変換した分布の密度関数 ((13) 式, 本稿では「一般化された矩形誤差型分布」と呼ぶことにする) における位置母数,

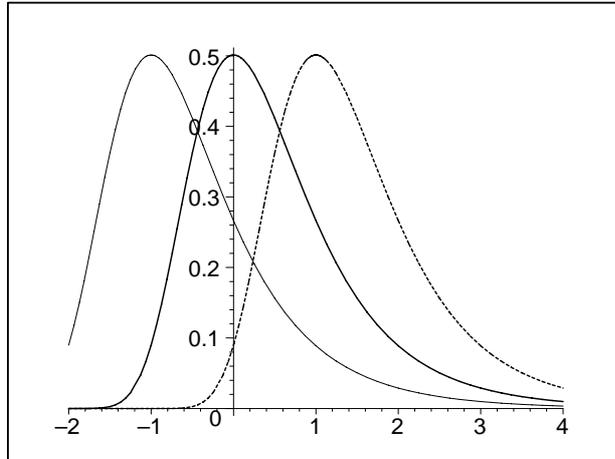


図 5: 対数矩形誤差型分布 ((11) 式, $a = 2, \sigma = 1$): $\mu = 0$ (実線), $\mu = 1$ (点線), $\mu = -1$ (細実線)

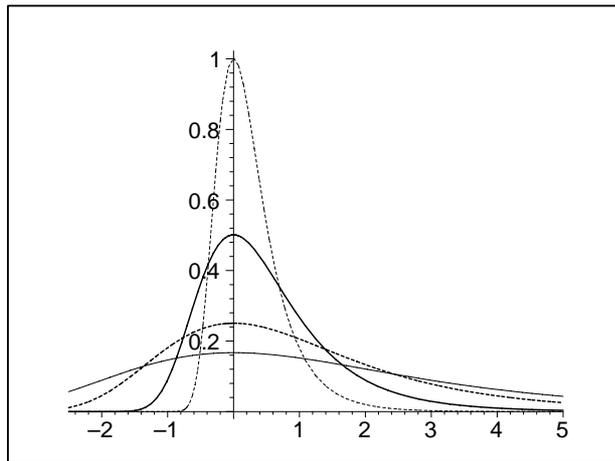


図 6: 対数矩形誤差型分布 ((11) 式, $a = 2, \mu = 0$): $\sigma = 1$ (実線), $\sigma = 2$ (点線), $\sigma = 3$ (細実線), and $\sigma = 1/2$ (細点線)

尺度母数の影響は、それぞれ図7と図8に見て取れる。図7は、パラメータを $\theta = e^\mu$ と再定義することで、図3((10)式)に対応していることに注意する。以上、詳細は Kagihara [2009] を参照されたい。

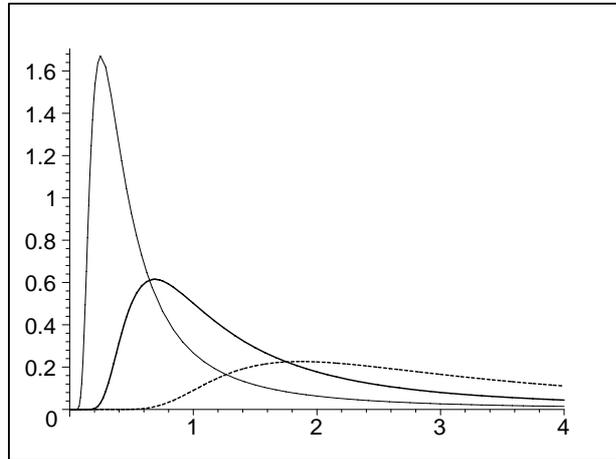


図7: 一般化された矩形誤差型分布 ((13)式, $a = 2, \sigma = 1$): $\mu = 0$ (実線), $\mu = 1$ (点線), $\mu = -1$ (細実線)

III 最小矩形法のバイアスデータへの応用可能性

以上で最小矩形法に関する統計的性質を紹介してきたが、本節においては、この推定法が有する方法論上の可能性を議論することにしたい。問題の所在を明らかにする為、次のような単純な計測誤差モデルを考える。即ち、我々が計測したい何らかの数値的対象があるとしよう。この数値を α とし、非確率な真値とするが、計測には誤差 η を伴うとしよう。この時、計測される変数 x は以下で表現される。

$$x = \alpha + \eta. \tag{14}$$

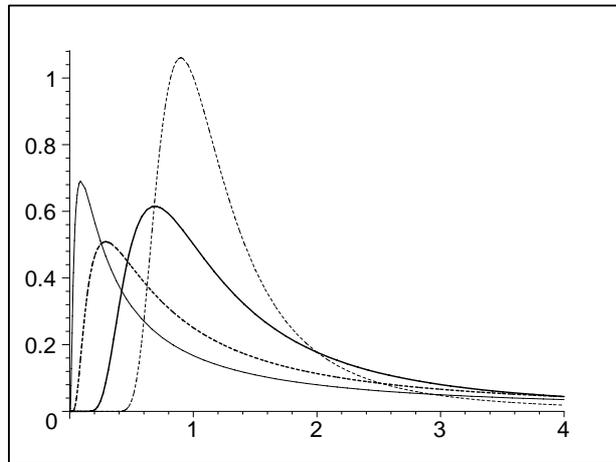


図 8: 一般化された矩形誤差型分布 ((13) 式, $a = 2, \mu = 0$): $\sigma = 1$ (実線), $\sigma = 2$ (点線), $\sigma = 3$ (細実線), $\sigma = 1/2$ (細点線)

ここで、我々は変数 x に関する計測を n 回独立に繰り返し、変数 x に関する大きさ n の無作為標本 $\{x_i\}_{i=1}^n$ に基づいて、求めたい真値 α を推定することになる。

計測誤差がない場合、我々は計測対象である真値 α を精確に知ることができる訳なのだが、通常は望み難いケースであろう。そこで、計測誤差 η が正規分布と仮定できるような場合、即ち、そのような計測機構を構築することができた場合、最尤推定法になっているという意味において、最小二乗法（即ち、標本平均）が真値 α の推定法として望ましいと言える⁴。一方、計測機構(14) がそれ程うまくは設計できず、正規分布が想定する以上の誤差が計測誤差 η に含まれてしまう場合、 η に仮定する分布としては、正規分布よりも両裾が厚い Laplace 分布等が適当となり得る。この時、最小絶対偏差法（即ち、標本中央値）が、最尤推定法になっているという意味において、真値 α の推定法としてより望ましいことになる。

同様に、真値 α を計測するに際し、何らかの計測バイアスが避けられない時、

⁴この場合、最良不偏推定にもなっている。

即ち、 $E[x] \neq \alpha \iff E[\eta] \neq 0$ と考えられる時、計測誤差 η に仮定する分布としては、正規分布や Laplace 分布のような左右対称型分布よりも、正負いずれか一方にのみ裾が厚く歪んだ分布が適当となる場合があるだろう⁵。例えば、最小矩形法を最尤法に関連付ける母数 $a = 2, \mu = 0, \sigma = 1$ における対数矩形誤差型分布(11)、即ち、矩形誤差分布(8)を対数変換した分布は、図9に示されているように、その右裾において正規分布よりも遅いオーダーで密度が0に収束する一方、その左裾においては正規分布よりも速いオーダーで0に収束することが分かる⁶。つまり、対数矩形誤差型分布の標準型((11) 式において、 $a = 2, \mu = 0, \sigma = 1$ としたもの)は、このような計測バイアスを表現するのに適当な誤差分布となり得るのである。この時、(14) 式を指数変換して最小矩形法を用いることで最尤推定量が得られ、結果として、最小矩形法が真値 α の推定法として望ましいことになる。

以上より、計測データ x に含まれる「計測バイアス」を、計測誤差 η が一方にのみ裾が厚く歪んだ分布を持つ場合として表現するのであれば、つまり、そのように計測される変数 x を「バイアスを含んだデータ(バイアスデータ)」として理解するのであれば、最小矩形法とは、そのようなバイアスデータを処理する際に適した方法としての可能性を持つことになる。この時、正方向に裾が厚く歪んだ誤差分布であれば、計測データ x には上方バイアスが存在し、負方向であれば下方バイアスが存在すると言えよう。このような意味において、我々が利用するデータに正負いずれか一方に計測バイアスが存在すると考えられる場合、最小二乗法は大きな誤差に推定値が影響されやすいという点で、最小絶対偏差法はバイアス情報(大きな誤差が一方にのみ発生し得るという情報)を利用していないという点で、それぞれ望ましくない。一方で、このような場

⁵あるいは、左右対称型分布が正負いずれかの方向に平行移動したのものとしても定式化できよう。この場合、分布の平行移動の距離 d でバイアスを表現する訳だが、計測対象 α とバイアス d の識別の問題が生じよう。この点、本節の議論では、分布の歪みと片裾の厚みでバイアスを表現していることになる。いずれの定式化が適当であるかは計測バイアスの性質次第であり、当該データの計測法から判断することになるだろう。

⁶対数矩形誤差分布の「標準型」($a = 2, \mu = 0, \sigma = 1$)と正規分布 $N(0, \tau^2)$ の密度の比は、 $\exp[\eta^2\{1/(2\tau^2) - 1/\eta + 1/(\eta e^\eta)\}]$ に比例する。これより、正規分布の分散 τ^2 に依存せず、右裾($\eta \rightarrow +\infty$)において無限大に発散する一方、左裾($\eta \rightarrow -\infty$)においては0に収束することが分かる。

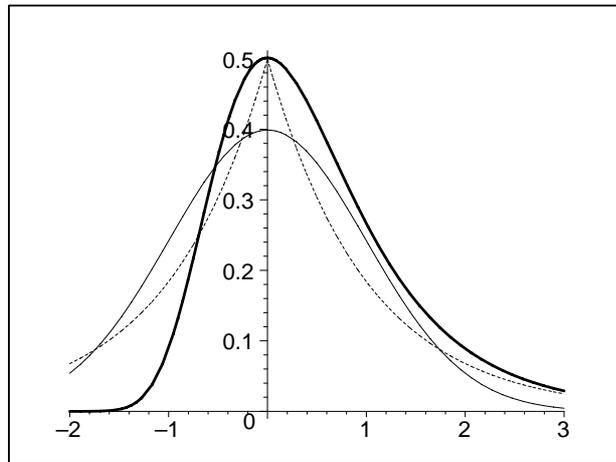


図 9: 標準正規分布 ($\propto e^{-\eta^2/2}$, 実線), 標準 Laplace 分布 ($\propto e^{-|\eta|}$, 点線), 標準対数矩形誤差型分布 ($\propto e^{-\eta(1-e^{-\eta})}$, 太実線)

合, 最小矩形法は最尤推定法としての効果を発揮し得るのである。

白塚 [2005] や Ariga and Matsui [2003] で分析されているように, 日本の CPI (Consumer Price Index) データには上方バイアスが存在すると指摘されており, また, 購買力平価算出の基礎となる ICP (International Comparison Program) 価格データについて, Chen and Ravallion [2008] はバイアスの存在を指摘している。このように, 経済データには何らかのバイアスが存在するケースが少なくないと考えられる。経済データは, その数量化の過程が単純な観測や計測ではあり得ないからであり, その作成上, 何らかの歪みや系統的なバイアスが入ってくる余地は決して小さくないと言えよう⁷。つまり, 計測誤差モデル(14)において, 計測誤差 η が左右対称に分布している状況よりも, むしろ非対称に分布していることの方が十分妥当性を有する状況であり得るのである。とするならば, データ作成上の精度を高めること, 即ち, 計測誤差を正規分布に近付ける

⁷この点に関連する最近の議論として, Stiglitz, Sen, and Fitoussi eds. [2009] を挙げることができよう。

ような計測機構(14)の設計を目指すことは、依然として重要な作業ではあるが、前述のような経済データに対する制約を考慮すると、むしろ計測バイアスの存在を前提とした統計分析手法の存在価値は大きく、その開発や改良が大きな意義を有してくることは論を俟たないであろう。それ故に、本節のような枠組みでバイアスデータを考察し、そのようなバイアスデータを効果的に処理し得る最小矩形法の研究を進展させることは、経済統計分析の基礎研究として意義深く、かつ、重要であると言えよう。

IV 結論

以上、最小矩形推定量の基本的な統計的性質が紹介されると共に、その過程で導出された新規であり得る確率分布の基本的性質、並びに、その一般化された分布が提示された。また、これらの結果に基づいて最小矩形法が有する方法論上の可能性が論ぜられたが、未だ多くの課題が残されている。それらを展望することによって、本稿の結論とする。

第I節で指摘したように、正值性を利用した推定法としては Yoneda [2006] の最小矩形法の他に、二乗誤差、対数二乗誤差、Stein 損失に基づく推定法が考えられ、それらとのより詳細なる比較検討は興味深い課題である。更に、矩形誤差と Jeffreys 情報量との関連もまた理論的には興味深いところであろう。また、最小矩形法の計算法は Yoneda [2006] によって提案されているが、Kagihara and Yoneda [2009] で指摘されているように未だ改善の余地は残されている。計算法の問題は、本稿では扱っておらず、今後の課題として残されていることを指摘しておく。最小矩形法から導き出される諸分布は Johnson, Kotz and Balakrishnan [1994,1995] 等の文献に見出されず、第II節において、Kagihara [2009] に沿ってその基本的性質と分布の一般化が提示された。それに基づいて、位置母数のみの単純な乗法誤差モデルにおける最小矩形推定量の漸近分布が提示されたが、一般の回帰モデルに拡張することや、計測誤差に時系列構造を取り込むことは重要な拡張となる。また、対数矩形誤差型分布(11)が対数 Weibull 分布(12)と似た形を持っていることが指摘されたが、この事実から極値論との

関連は検討に値すると思われる。裾の厚さを含め、他の分布族との比較検討は、今後も注意深くなされ続ける必要がある。最小矩形法が有する方法論的な可能性は、バイアスデータとの関連で第 III 節で議論されたが、右裾に厚い分布から生じる正值データを分析する際の有用性（定理 1 参照）と共に、本推定法が有する潜在的な魅力を示しており、以上で指摘された諸課題を踏まえて、最小矩形法に関する研究を更に進展させていくことが望まれる。

謝辞

本研究は、米田清教授の研究に触発されねば、取り組むことはなかったであろう。また、本研究を通じて導出された確率分布は筆者にとって未知なものであり、この点について、森棟公夫先生を始めとして多くの方から助言を賜ったことは何よりの励みとなった。この場を借りて、心よりの感謝を捧げたい。勿論、残された誤りの責は筆者に帰す。

参考文献

- 白塚重典 [2005] 「わが国の消費者物価指数の計測誤差：いわゆる上方バイアスの現状」『日銀レビュー（2005年11月）』
- Ariga, K. and K. Matsui [2003] “Mismeasurement of the CPI”, In *Structural Impediments to Growth in Japan*, (eds., M. Blomström, J. Corbett, F. Hayashi, and A. Kashyap), National Bureau of Economic Research, 89–128.
- Brown, L. [1968] “Inadmissibility of the usual estimation of scale parameters in problems with unknown location and scale parameters”, *The Annals of Mathematical Statistics*, **39**, 29–48.
- Brown, L. D. [1990] “Comment on the paper by Maatta and Casella”, *Statistical Science*, **5**, 103–106.

- Burbea, J. [2006] “J-Divergences and related concepts”, In *Encyclopedia of Statistical Sciences*, 2nd ed., vol. 6 (eds., S. Kotz, N. Balakrishnan, C. B. Read, B. Vidakovic, and N. L. Johnson), John Wiley & Sons, 3737–3743.
- Casella, G. and R. L. Berger [2002] *Statistical Inference*, 2nd ed., Duxbury.
- Chen, S. and M. Ravallion [2008] “The developing world is poorer than we thought, but no less successful in the fight against poverty”, *Policy Research Working Paper*, World Bank, Development Research Group.
- James, W. and Stein, C. [1961] “Estimation with Quadratic Loss”, In *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **1**, University of California Press, 361–380.
- Johnson, N. L., S. Kotz, and N. Balakrishnan [1994] *Continuous Univariate Distributions*, vol.1, 2nd ed., Wiley.
- Johnson, N. L., S. Kotz, and N. Balakrishnan [1995] *Continuous Univariate Distributions*, vol.2, 2nd ed., Wiley.
- Kagihara, M. [2009] “Semilogarithmic error based estimation and its related distributions”, In *JSM 2009 Proceedings*, American Statistical Association, 3214-3227.
- Kagihara, M. and K. Yoneda [2009] “On statistical interpretations of the semi-logarithmic loss function”, *CAES Working Paper Series*, Center for Advanced Economic Study, Fukuoka University.
- Kullback, S. [1968] *Information Theory and Statistics*, Dover.
- Lehman, E. L. and G. Casella [1998] *Theory of Point Estimation*, 2nd ed., Springer.
- Maatta, J. M. and G. Cassela [1990] “Development in decision-theoretic variance estimation”, *Statistical Science*, **5**, 90–101.

Stein, C. [1964] “Inadmissibility of the usual estimator for the variance of a normal distribution with unknown mean”, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **16**, 155–160.

Stiglitz, J., A. Sen, and J. Fitoussi eds. [2009] *Report by the Commission on the Measurement of Economic Performance and Social Progress*, Commission on the Measurement of Economic Performance and Social Progress.

Yoneda, K. [2006] “A parallel to the least squares for positive inverse problems”, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **49**, 279–289.